1. Egy asztalon három halomban 2009 db kavics van. Egyet eldobok belőle, és a többit két kupacba osztom. Ezután megint eldobok egyet az egyik halomból (amelyikben egynél több kavics van) és az egyik halmot ismét két részre osztom. Lehetséges-e hogy bizonyos számú ilyen művelet után minden kupacban pont három kavics lesz?

Megoldás:

Ha a lépések száma x akkor az eldobott kavicsok száma x, a meglévő kavicsok száma 2009-x, a halmok száma x+1.

Ha minden halomban 3 kavics marad, akkor $3\cdot(x+1)=2009-x$, ahonnan $x=501{,}5$. Mivel a lépések száma pozitív egész szám , ezért nem lehetséges, hogy végül mindegyik kupacban pontosan 3 kavics legyen.

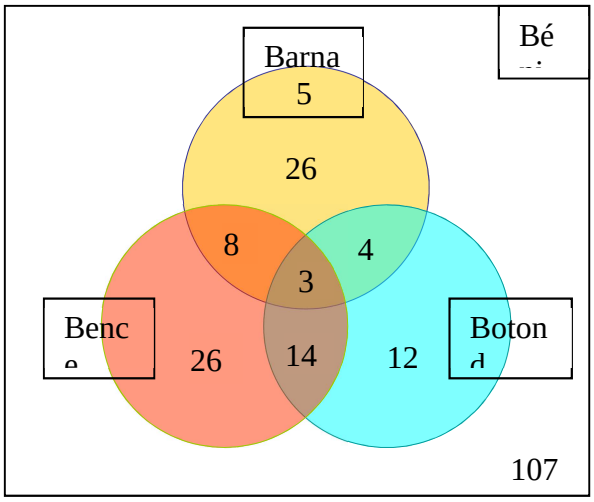
2. A nanobolha család a számegyenes O pontjában lakik. Bolhapapa négy csemetéje közül Béni, a legkisebb, 1 egység hosszúságút ugrik, a többiek,Bence, Barnabás és Botond, rendre 4, 5, ill. 6 egységnyit.
A bolhagyerekek könyörgésének engedve, Bolhapapa egy reggel elengedi csemetéit, hogy kedvükre ugrálhassanak a számegyenesen, de azzal a feltétellel, hogy 100 egységnél nem ugrálhatnak messzebbre a háztól. Pattognak is véletlenszerűen estig.

a) Adjuk meg a számegyenes számukra megengedett részének azokat a pontjait ahol mind a négyen összetalálkozhatnak?
b) Hány olyan pont van, ahol pontosan hárman találkozhatnak?
c) Hány olyan pont van, ahol legalább ketten találkozhatnak napközben?
d) Hány olyan van, ahol közülük csak egy fordulhat elő?

Megoldás:

Béni minden pontba eljuthat. Bence a néggyel osztható pontokba, Barna az 5-tel, és Botond a 6-tal osztható pontokba juthat el.

a) A számegyenesnek azokban a pontjaiban találkozhatnak mind a négyen, amelyekhez tartozó számok oszthatók a felsorolt számok mindegyikével, azaz oszthatók e számok legkisebb közös többszörösével. [1; 4; 5; 6] = 60, így három pontban találkozhat mind a négy bolha csemete: a -60, a 0 és a 60 pontban.
b) Azokat a számokat keressük, amelyek a 4, 5 és 6 közül pontosan kettővel oszthatók. Készítsünk Venn diagramot a feladathoz. Az ábra részhalmazaiba írjuk be azoknak a pontoknak a számát, amelyek a megfelelő oszthatósági feltételnek eleget tesznek.



Pontosan azok az egész számok oszthatók 4-gyel is és 5-tel is, amelyek oszthatók 20-szal.

A [-100 ;100]-ba eső 20-szal osztható egész számok száma :11 (0, ±20, ±40, ±60, ±80, ±100). Ezek közül azoknak a számát, amelyek 6-tal nem oszthatók, megkapjuk, ha 11-ből 3-at kivonunk: 8.

Hasonló gondolatmenettel: öttel és hattal pontosan azok a számok oszthatók, amelyek 30-cal oszthatók. A vizsgált intervallumban 7 ilyen számot találunk. Azoknak a száma, amelyek 5-tel és 6-tal oszthatók, de nem oszthatók 4-gyel: 7-3=4.

A 4-gyel és 6-tal osztható számok pontosan azok, amelyek 12-vel oszthatók. Itt (8+8+1=)17 ilyen szám van. Ezek között szerepelnek azok is, amelyek 5-tel is oszthatók. Közülük 5-tel nem osztható 14 szám.

Így azoknak a pontoknak a száma, ahol pontosan három bolha találkozhat 8+4+14=26.

c) Azokban a pontokban találkozhat pontosan két bolha, ahová Bénin kívül csak egy bolha ugrálhat. Ezek azok a számok, amelyek 4-gyel oszthatók, de 5-tel és 6-tal nem oszthatók, valamint ebben az értelemben csak 5-tel, ill. csak 6-tal oszthatók.

Ezek megszámolásához először kiszámoljuk, hogy hány olyan pont van, ahova a bolhacsemeték ugrálhatnak. Bence 51 pontba, Barna 41 pontba juthat el, Botond pedig 33 különböző pontot tud felkeresni.

Az így kapott számokból ki kell vonni azoknak a számát, amelyekbe Bénin kívül más testvér is ugrálhat. Így csak Béni és Bence 51- 25= 26 pontba, Csak Béni és Barna 41-15 =26 pontba és Béni és Botond 33-21 = 12 pontba juthat el. Tehát pontosan ketten 26 +26+12 =64 pontba jutnak el.

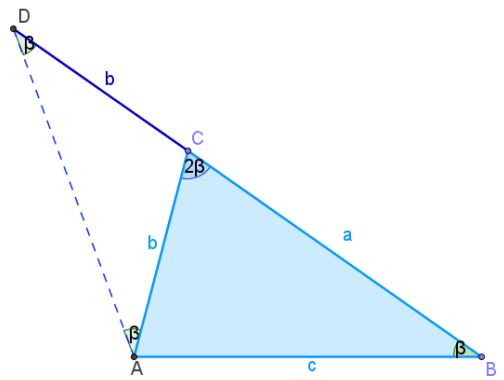
Legalább két bolha azokban a pontokban találkozik, amelyek száma 4-gyel, 5-tel vagy 6-tal oszthatók. Számuk kiolvasható az ábrából: 26+8+3+4+26+14+12= 93.

d) Azok a pontok, amelyekbe csak egy bolha jut el , azok, amelyeknek száma nem osztható sem 4-gyel, sem 5-tel, sem 6-tal. Ezek számát megkapjuk, ha a 201 számból kivonjuk azok számát, amelyek valamelyik felsorolt számmal oszthatók, azaz 93-at . Tehát csak 1 bolha 201-93= 108 pontba juthat.

3. *Az a, b, c oldalú háromszögben a szokásos jelölésekkel $\gamma=2\beta$. Bizonyítsd be, hogy a **c** oldal **b** és **a+b** mértani közepe!*

I. Megoldás:

Bizonyítandó: $c^2 = b(a+b)$. Rendezzük át az egyenletet: $\frac{c}{b} = \frac{a+b}{c}$.



Keressünk olyan háromszögeket, amelyeknek az oldalai a fenti szakaszok!

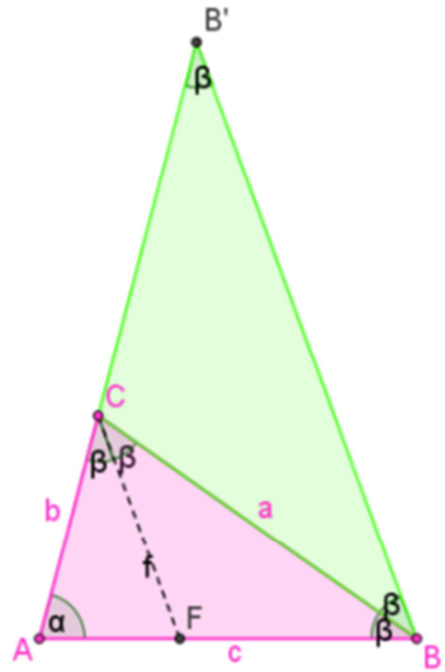
Ehhez mérjük fel a *BC* oldal *C* –n túli meghosszabbítására a ***b*** szakaszt!

A szerkesztés szerint *ACD* háromszög egyenlő szárú és *DCA*∠= 180°-2β miatt *ADC*∠=*DAC*∠=β. Ezért *ABD* háromszög is egyenlő szárú, és *AD* = *c*. Továbbá a *DAC* háromszög és a *BDA* háromszög hasonló, megfelelő oldalaik aránya egyenlő: $\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{AB}$, azaz $\frac{c}{b}=\frac{a+b}{c}$, amit bizonyítani akartunk.

(Megjegyzés: Kifejezhető a két egyenlő szárú háromszögbőla β koszinusza: $\cos\beta=\frac{\frac{1}{2}BD}{AB}=\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{c}$, ill. $\cos\beta=\frac{\frac{1}{2}AD}{AC}=\frac{\frac{1}{2}c}{b}$. Ezekből is adódik a bizonyítandó egyenlőség.)

II. Megoldás:

Húzzunk párhuzamost a *CF* szögfelezővel a *B* csúcson keresztül. Ennek az *AC* oldalegyenessel való metszéspontját jelöljük *B'*-vel. *B'BC*∠=*BCF*∠=β, mert váltószögek és *BB'C*∠=*FCA*∠=β, mert egyállású szögek, így *BB'C* háromszög egyenlő szárú háromszög. *AB'B*Δ~*ABC*Δ, mert szögeik páronként egyenlők. Megfelelő oldalaik aránya egyenlő: $\frac{BA}{B'A}=\frac{AC}{AB}$, azaz $\frac{c}{a+b}=\frac{b}{c}$. Ebből kapjuk $c^2=b\cdot(a+b)$, ami a bizonyítandó állítással / $c=\sqrt{b(a+b)}$ / ekvivalens.



III. Megoldás:

Írjuk fel a szinusztételt az *ABC* háromszögre: $\frac{c}{b}=\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}=2\cos\beta$.

Írjuk fel a *b* oldalra a koszinusztételt: $b^2=c^2+a^2-2ac\cos\beta$.

A két egyenletből kapjuk: $b^2=c^2+a^2-\frac{ac^2}{b}$. Szorozzunk *b*-vel, majd rendezzük át az egyenletet az alábbiak szerint!

$$b^3-ba^2=c^2b-c^2a$$
$$b\left(b^2-a^2\right)=c^2(b-a)$$
$$b(b-a)(b+a)=c^2(b-a).$$

Innen, ha $b\neq a$, oszthatunk $(b-a)$-val , s kapjuk a bizonyítandó állítást: $b(b+a)=c^2$.
Ha *b* = *a*, akkor a háromszög egyenlő szárú, és mivel szögeinek az összege $4\beta=180°$, ezért derékszögű is. Ebben $b(a+b)=2a^2$, és ugyanakkor $c^2=2a^2$ is teljesül.
Tehát minden, a feltételnek megfelelő háromszögre igaz a bizonyítandó állítás.

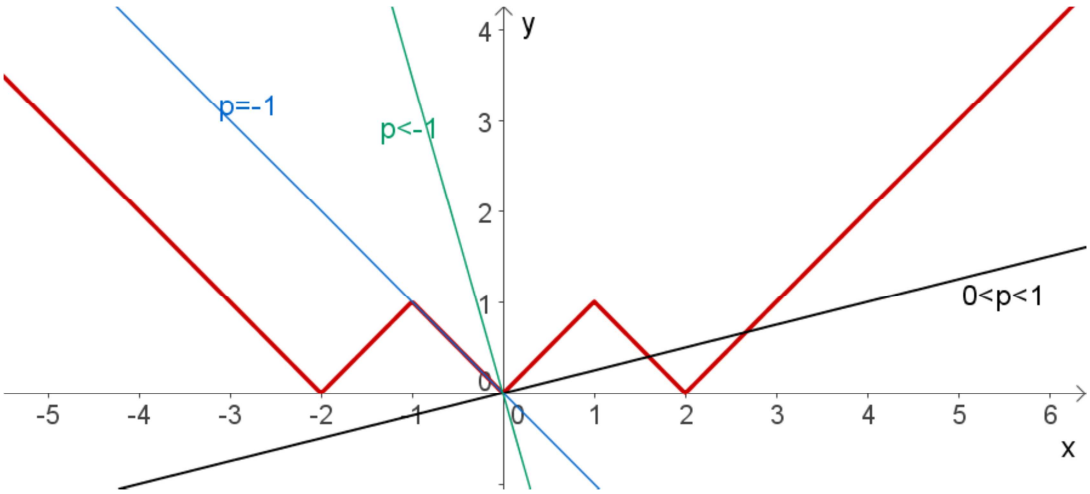
4. *Mely p valós paraméterek esetén van megoldása a következő egyenletnek?*

$$\left|\left|\left|x\right|-1\right|-1\right| = p \cdot x$$

Megoldás:

Ábrázoljuk az egyenlet baloldalán szereplő kifejezésnek megfelelő függvényt!

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = \left|\left|\left|x\right|-1\right|-1\right|$



Az ábráról leolvasható:

a) Ha $|p| > 1$, akkor a $g(x) = px$ lineáris függvény képe egy helye –az origóban– metszi az *f* függvény grafikonját, ezért az egyneletnek egy megoldása van.

b) Ha $|p| = 1$, akkor a *g* és az *f* függvények hozzárendelési szabálya *p*= -1 esetén a [-1 ; 0], ill. p = 1 esetén a [0 ;1] intervallumban azonos, a két grafikon a fenti intervallumon egybeesik. Így az egyenletnek végtelen sok megoldása van.

c) Ha $|p| < 1$, akkor az egyenes háromszor metszi az *f* függvény grafikonját, három megoldása van az egyenletnek.

5. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet*

$\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = \sqrt{3}\cdot\sin y + \cos y$, *ahol* $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$

Megoldás:

Vegyük észre, hogy $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$.

A baloldalon egy pozitív szám és annak reciprokának összege áll; amiről tudjuk, hogy legalább 2. Ezért $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x \geq 2$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

A jobb oldalt alakítsuk át a következőképpen:

$\sqrt{3}\cdot\sin y + \cos y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y + \frac{1}{2}\cos y\right) = 2\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$. Ez alapján a jobb oldal minden $y \in \mathbf{R}$ esetén legfeljebb a 2 értéket veheti fel, mivel $2\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$.

A bal és jobboldali kifejezések értékkészletének egyetlen közös eleme a 2.
Az egyenletnek csak olyan $(x;y)$ valós számpár lehet megoldása, amelyre

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}=2 \quad \text{és} \quad 2\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=2\,.$$

I. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}=2$ pontosan akkor, ha $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1$.

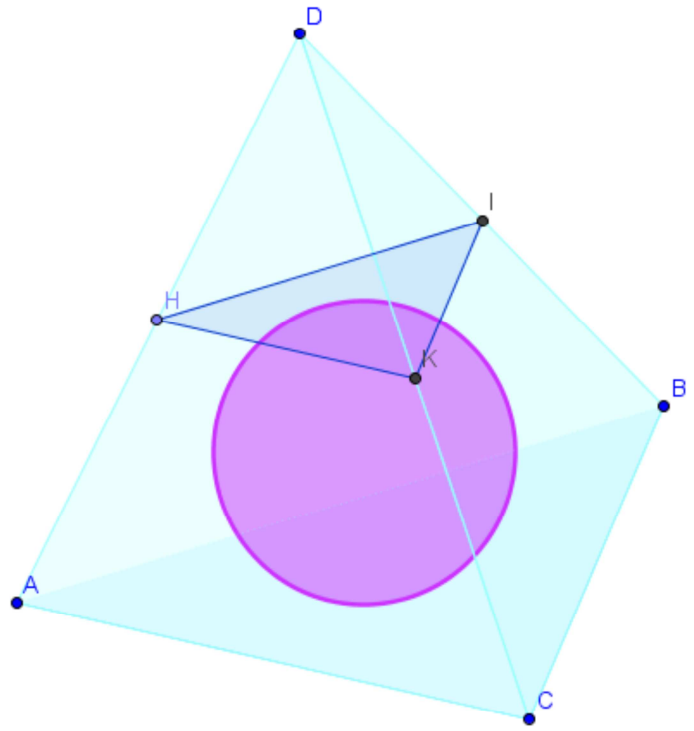
Az $x\mapsto\left(2+\sqrt{3}\right)^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az utóbbi egyenlet egyetlen megoldása: $x=1$.

II. A jobb oldalon $\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=1$, amiből $y=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$.

Az egyenlet megoldásai az $\left(1\,;\,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$ számpárok $(k\in\mathbf{Z})$.

6. *Egy tetraéderbe egységsugarú gömb írható. A gömbnek a tetraéder lapjaival párhuzamos érintősíkjai a tetraéderből 1-1 kis tetraédert vágnak le. Mekkora az ezekbe, a tetraéderekbe írt gömbök sugarának az összege?*

Megoldás:



A T_1 alapterületű M_1 magasságú tetraéderbe beírt gömb alaplappal párhuzamos érintősíkja az eredetiből, ahhoz hasonló tetraédert vág le. Ennek a „kis” tetraédernek a magassága M_1-2R=M_1-2 (ahol R =1 a beírt gömb sugara).

A hasonlóság aránya $\lambda_1=\frac{M_1-2}{M_1}$, ezért a kis tetraéder beírt gömbjének a sugara

$$r_1=\lambda_1\cdot R=\frac{M_1-2}{M_1}=1-\frac{2}{M_1}\,.$$

Hasonlóan a másik három kis tetraéder beírt gömbjének a sugara:

$r_2 = 1 - \frac{2}{M_2}$, $r_3 = 1 - \frac{2}{M_3}$, $r_4 = 1 - \frac{2}{M_4}$, ahol M_2, M_3, M_4 a tetraéder T_2, T_3, T_4 területű lapjához tartozó magassága.

A kis tetraéderekbe írt gömbök sugarainak összege:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4 - 2\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_3} + \frac{1}{M_4}\right). *$$

Ismert, hogy a tetraéder (gúla) térfogata: $V = \frac{R \cdot A}{3}$, ahol A a tetraéder felszíne, R pedig a beírt gömb sugara.

A tetraéder térfogata: $V = \frac{T_1 \cdot M_1}{3}$, így $\frac{1}{M_1} = \frac{T_1}{3 \cdot V} = \frac{T_1}{R \cdot (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}$

$= \frac{T_1}{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}$, mert $R = 1$.

A * egyenlet zárójelében szereplő összes tag a fenti módon kifejezhető.

Ezeket ebbe az egyenletbe visszahelyettesítve, kapjuk:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4 - 2\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{T_1 + T_2 + T_3 + T_4} = 2.$$

Lányi Vera (Pécs) — Nagyné Pálmay Piroska (Budapest)